



**Саровский физико-технический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ**

Дополнительные разделы комбинаторики

Алексеев В.В.

**Саров
2016**



1. Расширенные биномиальные коэффициенты

- $C_n^k \equiv \binom{n}{k} ;$

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

- $C_n^0 = \frac{1}{0!} = 1$



Треугольник Паскаля:

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0



Биноминальная теорема

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

- Запишем производящую функцию для биномиальных коэффициентов:

$$(1 + z)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k, \quad \text{где } n \geq 0, \text{ целое.}$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad \text{где } n \geq 0, \text{ целое}$$



- Данное разложение функции $(1+z)^n$ в ряд согласуется с формулой Тейлора, в соответствии с которой коэффициент, стоящий при z^k равен:

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} f(z) \big|_{z=0} = \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = C_n^k$$

- Для этой функции ряд Тейлора сходится при $|z| < 1$.



- Можно ли допустить в биномиальной теореме, чтобы n было целым отрицательным числом?
- Ответ – **МОЖНО!** При этом треугольник Паскаля расширяется «вверх»

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

при этом $C_n^0 = 1$



Рассмотрим отрицательные строчки подробнее

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0



Выведем формулу для целых отрицательных биномиальных коэффициентов исходя не из их положения в треугольнике, а из определения:

$$\begin{aligned} C_{-n}^k &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n+k-1)}{k!} = \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n-k+1)}{k!} = (-1)^k C_{n+k-1}^k \end{aligned}$$



Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^n} &= (1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^k z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k \cdot z^k\end{aligned}$$

- Данная формула также согласуется с разложением в ряд Тейлора для $|z| < 1$.



Рассмотрим биномиальный ряд

для $n = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} C_{1/2}^k &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right)}{k!} = \\ &= \frac{1(1-2)(1-4) \cdots (1-2k+2)}{2^k k!} = \\ &= \frac{1(-1)(-3) \cdots (-2k+3)}{2^k k!} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(1)(3) \cdots (2k-3)(2k-1)}{2^k k!} = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-3)(2k-2)2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2)2k \cdot 2^k k!} = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{2^k k! 2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)4^k} C_{2k}^k \end{aligned}$$



Это позволяет нам раскладывать
в ряд функцию

$$\begin{aligned}\sqrt{1+z} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{1/2}^k z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)4^k} \cdot C_{2k}^k z^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \frac{7}{256}z^5 - \frac{21}{1024}z^6 + \dots\end{aligned}$$



Аналогично получаем

$$C_{-1/2}^k = \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k$$

- Получаем еще одну полезную производящую функцию:

$$\sqrt{\frac{1}{1+z}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-1/2}^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} C_{2k}^k z^k =$$
$$1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 - \frac{5}{16}z^3 + \frac{35}{128}z^4 - \frac{63}{256}z^5 + \dots$$



2. О разложении $\frac{1}{1-z}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

- Нужно понимать формулу как формальную символьную конструкцию.

$$1. A = 1 + z + z^2 + \dots = 1 + z(1 + z + z^2 + \dots) = 1 + z \cdot A$$

Из равенства $A = 1 + zA$ следует $(1-z)A = 1$ и из этого получаем

$$A = \frac{1}{1-z}.$$



2.
$$(1-z) \frac{1}{1-z} = (1-z)(1+z+z^2+\dots),$$

$$1 = (1+z+z^2+\dots) - (z+z^2+z^3+\dots) = 1.$$

3. Поделить лесенкой и получите в точности

$$1+z+z^2+z^3+\dots$$

$$b_1 \frac{1-z^n}{1-z},$$



4. Сумма геометрической прогрессии равна

$$b_1 \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

где b_1 – первый член прогрессии, а z – знаменатель прогрессии/

Если $b_1 = 1$ и $|z| < 1$, то очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$



5. По формуле бинома Ньютона

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-1}^k (-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Т.к. $C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$, откуда $C_{-1}^k = (-1)^k$

6. Любая аналитическая функция $f(z)$ по определению раскладывается в ряд Тейлора (возьмем в окрестности нуля):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$



Коэффициент при z^k равен производной k -го порядка в нуле, деленной на $k!$.

Для нашей функции производная равна:

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{1-z} = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$$

В точке $z=0$ все производные равны $k!$, т.е. коэффициент при z^k равен 1 для любого $k \geq 0$.



7. Пусть $G(z)$ генерирует последовательность a_n , т.е.

$$a_0, a_1, a_2, \dots \Leftrightarrow G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Известно, что

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots \Leftrightarrow \frac{1}{1-z} G(z) =$$

$$a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \dots$$